10/01/17:

Ασκ $\boxed{48-49}$: Παίκτης κερδίζει 1€ με πιθανότητα 0,6. Έστω ότι είχε b ευρώ. Σταματά να παίζει όταν το κέρδος του γίνει α ευρώ ή όταν χάσει τα λεφτά του. Χη η σ.δ. που περιγράφει το κέρδος μετά το n-οστό παιχνίδι. Είναι γνωστό ότι ο παίχτης χάνει 1€ με πιθ. 0,4.

(i) Νδο ότι σίγουρα θα τελειώσει το παιχνίδι.

(ii) Ποια η πιθ. το κέρδος του να γίνει α ευρώ κ' επομένως να τελειώσει το παιχνίδι του

(iii) Ποιος ο μέσος χρόνος τερματισμού του παιχνιδιού;

(iv) Αν ο παίκτης είχε αρχικά απεριόριστο κεφάλαιο, ποια η πιθ. να τελειώσει το παιχνίδι;
Αν ο αντίπαλος —//— —//— —//—

(v) Ποια η πιθ. ο παίκτης να έχει κέρδος 0€ οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή;

<u>Λύση</u>: $-b \quad x_0=0 \quad \alpha$

Σ.Δ. με 2 φράγματα απορρόφησης τα: $\alpha, -b$. $x_0=0$

(i) Απόδειξη της P(τελικής απορ.) $=1$.

$$\boxed{P(X_T=\alpha)=\frac{1-e^{-bs_0}}{e^{as_0}-e^{-bs_0}} \qquad P(X_T=-b)=\frac{e^{as_0}-1}{e^{\alpha s_0}-e^{-bs_0}}}$$

(ii) P(τελικής απορ. στο α)

$$P(Y_i=y)=\begin{cases}0.6, & y=1\\ 0.4, & y=-1\end{cases}$$

$EY_i = 1\cdot 0.6+(-1)\cdot 0.4 = 0.2 \neq 0 \xrightarrow{\text{θ. Wald}} \exists s_0$ με $g(s_0)=1$.

$g(s)=E(e^{sY}) = e^{s(1)}\cdot 0.6 + e^{s\cdot(-1)}\cdot 0.4 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^s\cdot 0.6+0.4\cdot e^{-s} = 1 \Rightarrow (e^s)^2 + 0.4 - e^s = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0.6\lambda^2-\lambda+0.4=0 \rightsquigarrow s_0=\ln\frac{q}{p}=\ln\frac{4}{6}<0$

$$A=\frac{1-e^{-s_0 b}}{e^{as_0}-e^{-s_0 b}}, \text{ όπου } s_0=\ln\frac{q}{p}$$

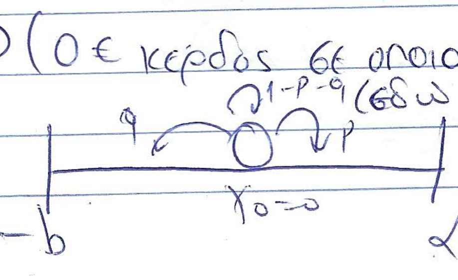
(iii) ET = τερματισμός ταυτότητας Wald μία φορά $= \dfrac{EX_T}{\mu} = \dfrac{P(X_T=\alpha)\cdot\alpha + P(X_T=-b)(-b)}{p-q}$

(iv) $P\left(\begin{matrix}\text{να τελειώσει το παιχνίδι}\\ \text{όταν } b\to\infty\end{matrix}\right) = \lim\limits_{b\to\infty}\underbrace{\frac{1-e^{-bs_0}}{e^{\alpha s_0}-e^{-bs_0}}}_{P(X_T=\alpha)} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{p^{\alpha}q^{\alpha}-p^{b}}{q^{\alpha+b}-p^{\alpha+b}} = 1.$

$P\left(\begin{matrix}\text{να τελ. το παιχνίδι}\\ \text{όταν } \alpha\to\infty\end{matrix}\right) = \lim\limits_{\alpha\to\infty}P(X_T=-b) = \dots$

(v) P(0€ κέρδος σε οποιαδ. χρονική στιγμή) $= (1-p-q)+p\cdot P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρέψω στο 0 ενώ}\\ \text{έχω πάει στο 1}\end{matrix}\right) + q\cdot P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρέψω στο 0 ενώ}\\ \text{είμαι στο } -1\end{matrix}\right) =$

(εδώ $p+q=1$)



$= (1-p-q) + p \cdot P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρέψω σε κάποια μελλοντική} \\ \text{στιγμή στο } -1 \text{ κ' να είχα αρχικά στο } 0\end{matrix}\right) +$

$+ q \cdot P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρ. στο } 1 \text{ ενώ} \\ \text{είμαι στο } 0\end{matrix}\right) =$

$= \underbrace{(1-p-q) + p \cdot P\left(\begin{matrix}\text{ένα φράγμα απορ.} \\ \text{στο } \underset{-b}{\overset{\shortparallel}{-1}}\end{matrix}\right)}_{s_0<0 \quad \overset{\shortparallel}{e^{s_0 b}}} + q \cdot P\left(\begin{matrix}\text{ένα φρ. απορρόφησης} \\ \text{στο } \underset{a}{\overset{\shortparallel}{1}}\end{matrix}\right)$

16κ–55): α) Έστω η Κ και η Ε παίζουν ένα παιχνίδι.

$P\left(\begin{matrix}\text{να κερδίσει} \\ \text{η } K\end{matrix}\right) = p$ κι' $P(\text{να χάσει}) = 1-p = q$

(i) Ποια η πιθ. η Κ μετά από 10 παιχνίδια να έχει κερδίσει 4 φορές παραπάνω.

X_n: σ.δ. που παριστάνει τον αριθμό νικών της Κ μετά το n-οστό παιχνίδι

$$P(X_{10}=4) \xrightarrow[\substack{n_1 \text{ βήματα δεξιά } \binom{n}{n_1}, \text{ πιθ. } p^{n_1} \\ n_2 \text{: βήματα αριστερά, } \binom{n-n_1}{n_2}, \text{ πιθ } q^{n_2} \\ n_1+n_2=10 \quad n_1-n_2=4 \Rightarrow n_1=7,\ n_2=3}]{} \binom{10}{7} p^7 q^3$$

(ii) Ποια η $P\left(\begin{matrix}\text{μετά από 100 παιχνίδια η Κ} \\ \text{να έχει κερδίσει από 8 έως 32 φορές παραπάνω}\end{matrix}\right) =$

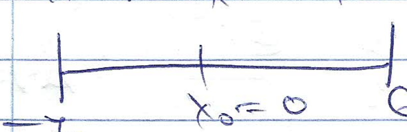
$$= P(8 \le X_{100} \le 32) = \sum_{\mu=8}^{32} \sum_{\substack{n_1+n_2=100 \\ n_1-n_2=\mu}} \binom{100}{n_1} p^{n_1} \binom{100-n_1}{n_2} q^{n_2}$$

Για $\mu=8 \Rightarrow n_1=54$

$\mu=9 \Rightarrow n_1=$ δεκαδικός (Άρα έχει νόημα μόνο για άρτια μ).

δηλ' για περιττά $\mu \Rightarrow P=0$

(β) X_n: σ.δ. που παριστάνει το κέρδος της Κ. Παίζουν το παιχνίδι έως ότου μία απ' τις 2 χάσει τα λεφτά της εφ' όσον δίνουν 1€ η μία στην άλλη για κάθε νίκη.
Η Κ έχει 7€ κ' η Ε 6€.



$P(\text{απορ. στο } -7)$

$P(\text{απορ. στο } 6)$.

$\mu = p-q, \quad ET = \begin{cases} \dfrac{EX_T}{\mu}, & \mu \ne 0 \\ \cancel{\dfrac{EX_T^2}{\sigma^2}}, & \mu = 0 \end{cases}$

(ii) Ποια η πιθ. να τελειώσει το παιχνίδι αν Κ έχει άπειρο ~~κεφάλαιο~~ κεφάλαιο $\rightsquigarrow P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο 6}\\ \text{ένα φράγμα}\end{matrix}\right)$

Όμοια για C $\rightsquigarrow P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } -7\\ \text{ένα φράγμα}\end{matrix}\right)$.

$\longleftrightarrow$

Ασκ (35): Σ' ένα ταμείο ενός κινηματογρ. με 1 υπάλληλο έρχονται πελάτες με Poisson(λ). Χρόνος παραμονής κάθε πελάτη ακολουθεί γενική κατανομή με σ.π.π. $b(t)$, $t\geq 0$. X_n: αριθμός πελατών στο σύστημα αμέσως μετά την εξυπ. του n-οστού πελάτη.

(i) Μαρκ. Αλυσίδα, (ii) P: πίνακας μεταβ. (iii) Σ.Ι. (στατ. ισορ.) όταν ~~$b(t)=\lambda e^{-\lambda t}$~~ $b(t)=\mu e^{-\mu t}$, $t\geq 0$.

[Ασκ_43 $\rightsquigarrow P_{\text{Poisson}}(4)$, Εκθ($\mu=7$), $P\left(\begin{matrix}\text{σε Σ.Ι. να υπάρχουν}\\ \text{2 προϊόντα}\end{matrix}\right)$]

[Ασκ_51 $\rightsquigarrow$ Poisson(5), α) Χρόνος ελέγχου 3 ή 4 ή 5 με πιθ. 1/2, 1/4, 1/4 αντίστ., β) όταν Εκθ(10)]

Λύση: Άρα έχω σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό (i) χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,\dots\}$.

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1+\underbrace{A_{n+1}}_{\substack{\text{όσοι μπήκαν}\\ \text{κατά την εξυπ.}\\ \text{του n-οστού πελάτη}}}\rightarrow B, & X_n>0\\ A_{n+1}=B^{(n+1)}, & X_n=0.\end{cases}$$

Άρα έχει τη μαρκοβιανή ιδιότητα

$$\text{(ii)}\quad P=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & 3 & \dots\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0\\1\\2\\3\\ \vdots\end{matrix} & \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \\ & & & & \ddots\end{bmatrix}\end{array}\qquad P(B=k)=b_k$$

Poisson(λt)

$$\text{(iii)}\ b_k=P\left(\begin{matrix}\text{να έχω k αφίξεις}\\ \text{κατά τη διάρκεια μιας εξυπ.}\end{matrix}\right)\overset{(35)}{=}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\,b(t)\,dt$$

στην 51α): $b_k=P\left(\begin{matrix}\text{να έχω k-αφίξεις}\\ \text{κατά τη διάρκεια μιας}\\ \text{εξυπ.}\end{matrix}\right)=$

$=P\left(\begin{matrix}\text{k-αφίξεις κατά τη διάρκεια}\\ \text{μιας εξυπ.}\end{matrix}\Big/\ \text{εξυπ. } T=3\right)\cdot P(T=3)+P\left(\begin{matrix}\text{k-αφίξεις}\\ \dots\end{matrix}\Big/ T=4\right)\cdot P(T=4)+$

$+P\left(\begin{matrix}\text{k-αφίξεις}\\ \dots\end{matrix}\Big/ T=5\right)\cdot P(T=5)=$

$$= \frac{e^{-\lambda 3}(\lambda 3)^k}{k!}\cdot\frac{1}{2} + \frac{e^{-\lambda 4}(\lambda 4)^k}{k!}\cdot\frac{1}{4} + \frac{e^{-\lambda 5}(\lambda 5)^k}{k!}\cdot\frac{1}{4}$$

Αν λέει εκθετική $\Rightarrow b(t) = \mu e^{-\mu t},\ t \geq 0$ κ' $b_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\mu e^{-\mu t}dt =$

$$= \frac{\lambda^k \cdot \mu}{(\mu+\lambda)^{k+1}} = \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{k+1}} \text{ (από Γάμμα)}$$

Για τις πιθ. σε Σ.Ι. έχω τον $P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ & b_0 & b_1 & \dots \\ & \dots & \dots & \end{bmatrix}$

άρα Μ.Α. μη-διαχ., απεριοδική

Από αντίστροφο Θ. Foster για να δω πότε είναι θετ. επαν.

Δηλ. $x = x \cdot P$ με όχι όλα τα $x_i = 0$ κ' $\sum |x_i| < +\infty$

$(x_0, \rho x_0, \rho^2 x_0, \rho^3 x_0, \dots)$, γενικά $x_k = \rho^k x_0$.

$x_k = \rho^k x_0$

Πότε συγκλίνει $\sum x \rho^k < +\infty$? $\Rightarrow$ Συγκλίνει για $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

(ισχύει στις ασκ. 43, 51)

Αν $\rho \geq 1$ τότε αποκλίνει $\Rightarrow$ οριακές πιθ $= 0 \Rightarrow$ όχι θετ. επαν.

Αν $\rho < 1 \Rightarrow \pi_i = (1-\rho)\rho^i$ (από θεωρία)

Για τα 2 προϊόντα που ζητάει $\Rightarrow \pi_2 = (1-\rho)\rho^2$

⊢⊣

Ασκ 52): 3 φίλοι Π, Κ, Γ παίζουν βελάκια.

Αν κέρδισε Π $\xrightarrow{0,3}$ Π, $\xrightarrow{0,5}$ Κ, $\xrightarrow{0,2}$ Γ , Κ $\xrightarrow{0,6}$ Π, $\xrightarrow{0}$ Κ, $\xrightarrow{0,4}$ Γ , Γ $\xrightarrow{0,4}$ Κ, $\xrightarrow{0,6}$ Γ

Τρίτη, P(κέρδισε Δ ο Π) = 0.4

P(κέρδισε Δ ο Κ) = 0.3

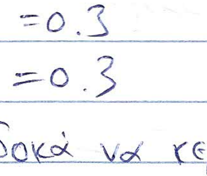
P(κέρδισε Δ ο Γ) = 0.3

Αν κέρδισε Π, πότε προσδοκά να κερδίσει;

Λύση:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 1 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 2 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{array}$$

Δηλ. σ.δ. που παριστά ποιος κέρδισε το n-οστό παιχνίδι $S = \{0, 1, 2\}$



$$\left.\begin{array}{l} x = x\cdot P \\ T = c\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{12}{46}, \frac{14}{46}, \frac{20}{46}\right) = x$$

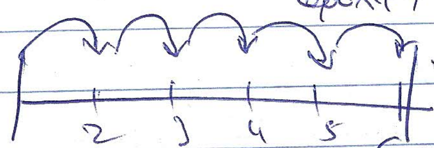
Ασκ 4 : Λύθηκε :

Ασκ_5) : Καιρός ~> n-οστή μέρα κ' $S = \{0, 1\}$

Χη: 6 δ.

0 βροχερή, 1 αλλιώς

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0.6 & 0.4 \end{array}$$



1η: Δεν ήταν βροχερός

6 : δεν είναι βροχερός.

(i) Θέλω $P_{11}^{(5)}$, (ii) $P_1^{(5)}$ (δηλ. αν δεν ξέρω τον καιρό την 1η μέρα)

Θεωρώ κατάσταση ισοπίθανες : $\Rightarrow P_0^{(0)} = (1/2, 1/2)$

Λύση: Θέλω να αποδείξεις: $P^{(n)} = P^{(0)} \cdot P^n$

(i)

και $P^{(n)} = P^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{pmatrix}$

$P_{11}^{(5)}$ είναι αν: $P^5 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \boxed{\delta} \end{pmatrix}$

(ii) $P_1^{(5)} = \begin{pmatrix} P_0^{(0)} & P_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{01}^{(5)} \\ P_{11}^{(5)} \end{pmatrix}$ (ίδια με τις ασκ_25, 40).

Στην (24) : Χιον. μέρα διαδέχεται καθ. με πιθ. 0.25

Μια καθαρή -||- μια χιον. με πιθ. 0.335

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ 0: \text{χιον.} & & 0.335 \\ 1: \text{καθ} & 0.25 & \end{array}$$

$P_{00}^{(3)}$ (ίδια με 40).

Άσκ_6: X_n: αριθμός επιτυχιών σε n-ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με $P(\text{Επιτ.}) = p$. Πιθανότητες μεταβ. ενός βήματος και στα $p_{ij}^{(n)}$ έχουμε τώρα.

Λύση:

(i)
$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4\ldots \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1-p & p & 0 & 0 & 0\ldots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \ldots \\ & & & \vdots & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

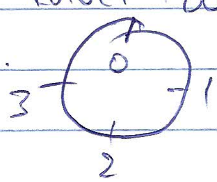
(ii) $p_{ij}^{(n)} = P\left(\begin{array}{c}\text{να πάω από } i \\ \text{στο } j \text{ σε} \\ n\text{-βήματα}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c}\text{να έχω } j-i \text{ επιτυχίες} \\ \text{σε } n\text{-δοκιμές}\end{array}\right) =$

$$= \begin{cases} 0, & j-i<0 \\ \binom{n}{j-i} p^{j-i} \cdot q^{n-(j-i)}, & j-i\geq 0 \end{cases}$$

Άσκ_7: λύθηκε

Άσκ_8: εκτός ύλης

Άσκ_9): Σωματίδιο κάνει τυχ. περίπατο στα σημεία 0, 1, 2, 3 ενός κύκλου.



βήμα δεξιά με πιθ. p

" αριστερά " q

X_n: η θέση του σωμ. μετά από n-βήματα.
Να προσδιοριστεί P.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

, $p+q=1$. Ποια η πιθ. να πάει στην 3η κατάσταση μετά από 2 βήματα αν αρχικά ήταν ισοπίθανα σε οποιαδ. θέση.

$p^{(0)} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ / Αποδ. από Θεωρ.

$P(X_2=3)$

ή αλλιώς:

Θέλω $p_3^{(2)} = p_0^{(0)} p_{03}^{(2)} + p_1^{(0)} p_{13}^{(2)} + p_2^{(0)} \cdot p_{23}^{(2)} + p_3^{(0)} \cdot p_{33}^{(2)}$

$$p_{13}^{(2)} = P\left(1 \begin{array}{l} \xrightarrow{q} 0 \xrightarrow{q} 3 \\ \xrightarrow{p} 2 \xrightarrow{q} 3 \end{array}\right) = q^2 + p \cdot q$$

όμοια τα υπόλ.

Έχουμε κάνει: 14, 15, 20, 19, 23, 24, 35, 29, 40, 41-53, 55, 61

όχι: 11, 12, 13, 42

εκτός 39, 57,